Fonctions caractéristiques de la gaussienne et de Cauchy

Garet-Kurtzmann, p. 248

Proposition: Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$.
Alors la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ est $t \mapsto e^{imt - \frac{\sigma^2}{2}t^2}$

On calcule d'abord ϕ_X pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
On a : $\forall t \in \mathbb{R}, \ \phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{itx} dx$.

Méthode 1 : par les fonctions holomorphes

Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{zx} dx$.
On a : • $\forall x \in \mathbb{R}$, $z \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} e^{zx}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
• $\forall R > 0, \forall z \in D(0,R), \ |e^{-\frac{x^2}{2}} e^{zx}| = e^{-\frac{x^2}{2}} e^{Re(z)x} \leq e^{-\frac{x^2}{2}} e^{R|x|} \in L^1(\mathbb{R})$
Par thm d'holomorphie sous le signe intégrale, g est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
De plus, pour $z \in \mathbb{R}$, on a :
$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2zx)} dx = e^{\frac{z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2zx + z^2)} dx = e^{z^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-z)^2} dx = e^{z^2/2}$$
Or, $z \mapsto e^{z^2/2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et coïncident avec g sur $\mathbb{R}$.
Par le principe des zéros isolés, elles coïncident sur $\mathbb{C}$ i.e. $\forall z \in \mathbb{C}, \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{zx} dx = e^{z^2/2}$
Pour $z = it$, on a $\phi_X(t) = e^{-t^2/2}$.

Méthode 2 : par une équation différentielle

Calculons $\phi_X'(t)$. Posons $f(t,x) = e^{-x^2/2} e^{itx}$. Alors $\phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t,x) dx$.
On a : • $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
• $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \ \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| = e^{-x^2/2} |ixe^{itx}| = |x| e^{-x^2/2} \in L^1(\mathbb{R})$
Par thm de dérivation sous le signe intégrale, on a :
$$\phi_X'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} ixe^{-x^2/2} e^{itx} dx \overset{IPP}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left[-ie^{-x^2/2} e^{itx}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} ie^{-x^2/2} ixe^{itx} dx = -t\,\phi_X(t)$$
Ainsi, ϕ_X est solution de $\begin{cases} y' = -ty \\ y(0) = 1 \end{cases}$. $\boxed{\text{Donc } \phi_X(t) = e^{-t^2/2}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Poser $F(t) = e^{t^2/2} \phi_X(t)$.
Alors $F'(t) = 0$ et $F(0) = 1$

Conclusion :

Si $Z \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, alors $Z = \sigma X + m$ où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Ainsi, $\phi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{it(\sigma X + m)}] = e^{itm} \phi_X(\sigma t) = e^{itm - \frac{\sigma^2}{2}t^2}$.

Proposition : Soit $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$.
La fonction caractéristique de la loi de Cauchy $\mathcal{C}(a,b)$ est $t \mapsto e^{iat - b|t|}$

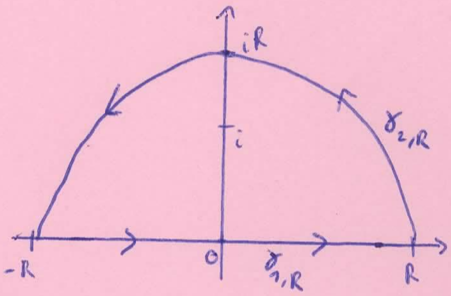
On calcule d'abord ϕ_X pour $X \sim \mathcal{C}(0,1)$.

On a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} e^{itx} dx$.

Méthode 1 : par intégration complexe

Soit $t > 0$ et $R > 1$. On considère la fonction $f(z) = \frac{e^{itz}}{1+z^2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.

On considère le chemin $\gamma_R = \gamma_{1,R} \cup \gamma_{2,R}$.



Puisque i est le seul pôle de f à l'intérieur de γ_R, par le thm des résidus :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \operatorname{Res}(f,i)$$

On a : $\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{e^{itz}}{z+i} = \frac{e^{-t}}{2i}$ d'où $\frac{1}{\pi} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = e^{-t}$.

Or, $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz$.

$|f(Re^{i\theta})| = \frac{|e^{itRe^{i\theta}}|}{|1+R^2 e^{2i\theta}|} \leq \frac{e^{-tR\overbrace{\sin\theta}^{\geq 0 \text{ car } \theta \in [0,\pi]}}}{R^2 - 1}$

car $|z^2+1| = |z^2 - (-1)| \geq |z^2| - |-1| = |z^2| - 1$

Mais $\left| \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz \right| \leq \underbrace{\operatorname{Long} \gamma_{2,R}}_{= \pi R} \times \sup_{z \in \gamma_{2,R}} |f(z)| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$

D'où $e^{-t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2} e^{itx} dx = \phi_X(t)$, $\forall t > 0$.

Puisque X est symétrique et que $\phi(0) = 1$, on a $\phi_X(t) = e^{-|t|}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Méthode 2 : par inversion de Fourier

Posons $f(x) = e^{-|x|}$.

Alors $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} e^{-itx} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-it)} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x(1+it)} dx = \left[\frac{e^{x(1-it)}}{1-it} \right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{-x(1+it)}}{1+it} \right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{1-it} + \frac{1}{1+it} = \frac{2}{1+t^2}$.

D'où $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et par inversion de Fourier, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{itx} dt \quad \text{i.e.} \quad e^{-|x|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2} e^{itx} dt = \phi_X(x)$$

Or, f et ϕ_X sont continues sur $\mathbb{R}$ donc il y a égalité partout i.e. $\phi_X(x) = e^{-|x|}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Conclusion :

Si $Z \sim \mathcal{C}(a,b)$, alors $Z = bX + a$ où $X \sim \mathcal{C}(0,1)$.

Ainsi, $\phi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{it(bX+a)}] = e^{iat} \phi_X(bt) = e^{iat - b|t|}$.